CHAPITRE 6 : SUITES ET SÉRIES DANS UN EVN

HEI 2 - 2013/2014 - A. RIDARD

Prérequis. Suites numériques, limites, équivalents, dl, sommes géométriques et téléscopiques

Dans ce chapitre, E désigne un $\mathbb{K}$-ev muni d'une norme $\|.\|$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I. Suites dans un evn

1. Définitions

Définition (suite).

Une suite (u_n) de E est une application de $\mathbb{N}$ dans E.

Définition (suite convergente/divergente).

Une suite (u_n) est convergente vers $l \in E$ si :

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ \|u_n - l\| < \epsilon$$

Une suite non convergente est dite divergente.

2. Propriétés

Beaucoup de théorèmes sur les suites numériques se généralisent : unicité de la limite quand elle existe, opérations algébriques, théorème de Bolzano-Weierstrass...

Propriété (une CN de convergence).

Si une suite (u_n) est convergente, alors elle est bornée autrement dit :

$$\exists M > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \|u_n\| \leq M$$

⚠ La réciproque est fausse mais on a :

Théorème (de Bolzano-Weierstrass).

Si E est de dimension finie, de toute suite bornée, on peut extraire une sous-suite convergente.

⚠ On ne peut évidemment pas généraliser les notions qui utilisent la relation d'ordre $\leq$: limite infinie, suites monotones, théorèmes de comparaison, suites adjacentes...

II. Séries dans un evn

Dans cette section, (u_n) désigne une suite de E.

Définition (série et sommes partielles)**.**

La série de terme général u_n, notée $[u_n]$, est la suite des sommes partielles (S_n) où $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

Remarque.
- S_n est appelée la somme partielle d'ordre n de la série
- Si la suite (u_n) est définie à partir d'un certain rang n_0, les sommes partielles sont définies par $S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$ pour tout $n \geq n_0$

Propriété (ev des séries)**.**

L'ensemble des séries muni de l'addition interne, définie par $[u_n] + [v_n] = [u_n + v_n]$, et de la multiplication par un scalaire, définie par $\lambda[u_n] = [\lambda u_n]$, forme un $\mathbb{K}$-ev.

Définition (série convergente/divergente)**.**

Une série $[u_n]$ est dite convergente si la suite (S_n) de ses sommes partielles est convergente.
Une série non convergente est dite divergente.

Définition (somme et reste d'une série convergente)**.**

Soit $[u_n]$ une série convergente.
La limite de $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ est appelée somme de la série $[u_n]$ et notée $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
La somme de la série convergente $[u_n]_{n\geq p+1}$ ($p \in \mathbb{N}$) est appelée reste d'ordre p de la série $[u_n]$ et notée $R_p = \sum_{n=p+1}^{+\infty} u_n$
On a alors, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $S = S_p + R_p$.

Propriété (linéarité de la somme)**.**

Soit $[u_n]$ et $[v_n]$ deux séries convergentes et $\lambda \in \mathbb{K}$.
Alors, la série $[u_n + \lambda v_n]$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + \lambda v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

Remarque.
- Si $[u_n]$ converge et $[v_n]$ diverge, alors $[u_n + v_n]$ diverge
- Si $[u_n]$ et $[v_n]$ divergent, on ne peut rien dire a priori sur $[u_n + v_n]$

Définition (série absolument convergente)**.**

Une série $[u_n]$ est dite absolument convergente si la série des normes $[\|u_n\|]$ converge.

III. Méthodes pour étudier une série

1. A termes dans un evn

a. Etudier la divergence grossière

Propriété (une CN de convergence)**.**

Si la série $[u_n]$ converge, alors la suite (u_n) converge vers 0.
Si la suite (u_n) ne converge pas vers 0, on dit que la série $[u_n]$ diverge grossièrement.

Preuve.

b. Etudier la suite des sommes partielles

Cette méthode permet de déterminer la somme en cas de convergence

Exemples.

1. Une série géométrique $[a^n]$ avec $a \in \mathbb{C}$

2. Une série téléscopique $[u_n]$ dont le terme général s'écrit $u_n = v_{n+1} - v_n$

3. La série harmonique alternée $\left[\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right]_{n\geq 1}$.
   On pourra remarquer que $\frac{1}{k} = \int_0^1 t^{k-1}\,dt$ ($k \in \mathbb{N}^*$) et montrer que $|S_n - \ln 2| \leq \left|\int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t}\,dt\right| \leq \frac{1}{n+1}$

c. Etudier la convergence absolue

Propriété (une CS de convergence)**.**

Si l'evn est de dimension finie, une série qui converge absolument est convergente.

Définition (série semi-convergente)**.**

Une série $[u_n]$ est dite semi-convergente si elle est convergente mais non absolument convergente.

2. A termes réels positifs

Propriété (une CNS de convergence)**.**

Une série $[u_n]$ à termes réels positifs est convergente si et seulement si la suite (S_n) de ses sommes partielles est majorée.
Dans ce cas, $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} S_n$.
Dans le cas contraire, $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.

Ce résultat fondamental fournit les deux théorèmes de comparaison suivants :

a. Comparer une série avec une intégrale

Théorème (de comparaison d'une série et d'une intégrale)**.**

Soit $a \in \mathbb{R}^+$ et $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une application continue par morceaux, positive et décroissante.
La série $[f(n)]$ converge si et seulement si $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.

Exemple. La série de Riemann $\left[\frac{1}{n^\alpha}\right]_{n\geq 1}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

b. Comparer deux séries

Théorème (de majoration/minoration)**.**

Soit $[u_n]$ et $[v_n]$ deux séries à termes réels positifs telles que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n \leq v_n$.

1. Si $[v_n]$ converge, alors $[u_n]$ converge
2. Si $[u_n]$ diverge, alors $[v_n]$ diverge

Exemples.

1. La série $\left[\frac{1}{n^2 \ln n}\right]_{n\geq 2}$ converge.
   On pourra utiliser la majoration $\ln n \geq 1$ pour tout $n \geq 3$

2. La série $\left[\frac{1}{\sqrt{n}\ln n}\right]_{n\geq 2}$ diverge.
   On pourra utiliser $\lim\limits_{n\to+\infty} n\dfrac{1}{\sqrt{n}\ln n}$ pour minorer $\frac{1}{\sqrt{n}\ln n}$ au voisinage de $+\infty$

Théorème (d'équivalence)**.**

Soit $[u_n]$ et $[v_n]$ deux séries à termes réels.
Si $u_n \sim v_n$ et $v_n \geq 0$ au voisinage de $+\infty$, alors $[u_n]$ et $[v_n]$ sont de même nature.

Exemple. La série $\left[\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]_{n\geq 1}$ diverge.

c. Comparer une série avec une série géométrique

Théorème (critère de d'Alembert)**.**

Soit $[u_n]$ une série à termes réels strictement positifs telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l \in [0,+\infty[\cup\{+\infty\}$.
- Si $l<1$, alors $[u_n]$ converge absolument
- Si $l>1$, alors $[u_n]$ diverge grossièrement
- Si $l=1$, on ne peut rien dire a priori sur $[u_n]$

Exemples.

1. La série $\left[\frac{(n!)^2}{(2n)!}\right]$ converge

2. La série $\left[(-1)^n\frac{n^n}{n!}\right]$ diverge

3. A termes réels

a. Etudier la convergence absolue

b. Séries alternées

Théorème (critère des séries alternées)**.**

Soit $[u_n]$ une série réelle dont le terme général change de signe à chaque rang.
Si la suite $(|u_n|)$ est décroissante et converge vers 0, alors $[u_n]$ converge.
De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le reste R_n d'ordre n est du signe de u_{n+1} et $|R_n| \leq |u_{n+1}|$

Exemple. La série harmonique alternée $\left[\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right]_{n\geq 1}$ converge (déjà vu)

c. Séries trigonométriques

Théorème (critère des séries trigonométriques)**.**

Soit $[u_n]$ une série réelle dont le terme général s'écrit $u_n = \cos(nx)v_n$ ou $u_n = \sin(nx)v_n$ avec (v_n) une suite réelle et $x \in \mathbb{R}$.
Si la suite (v_n) est décroissante et converge vers 0, alors :
- $[\cos(nx)v_n]$ converge pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$
- $[\sin(nx)v_n]$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$

Exemple. La série $\left[\frac{\cos(2n)}{\sqrt{n}}\right]_{n\geq 1}$ converge

4. A termes complexes

a. Etudier la convergence absolue

b. Une CNS de convergence

Propriété (une CNS de convergence)**.**

Soit $[u_n]$ une série complexe dont le terme général s'écrit $u_n = a_n + ib_n$ avec $a_n, b_n \in \mathbb{R}$.
La série $[u_n]$ converge si et seulement si les séries $[a_n]$ et $[b_n]$ convergent.
Dans ce cas, $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n + i \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$

c. Produit de Cauchy

Définition (produit de Cauchy)**.**

Soit $[u_n]$ et $[v_n]$ deux séries complexes.

On appelle série produit de $[u_n]$ et $[v_n]$ la série de terme général $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$.

Propriété.

Si deux séries complexes $[u_n]$ et $[v_n]$ convergent absolument, alors leur série produit $[w_n]$ converge absolument et $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} w_n\right)$.

Exemple. La série $\left[\frac{z^n}{n!}\right]$ converge pour tout $z \in \mathbb{C}$ et on a [1] :

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2,\ \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z'^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z+z')^n}{n!}$$

1. Nous verrons dans le chapitre sur les séries entières que cela correspond à la propriété :

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2,\ e^z e^{z'} = e^{z+z'}$$